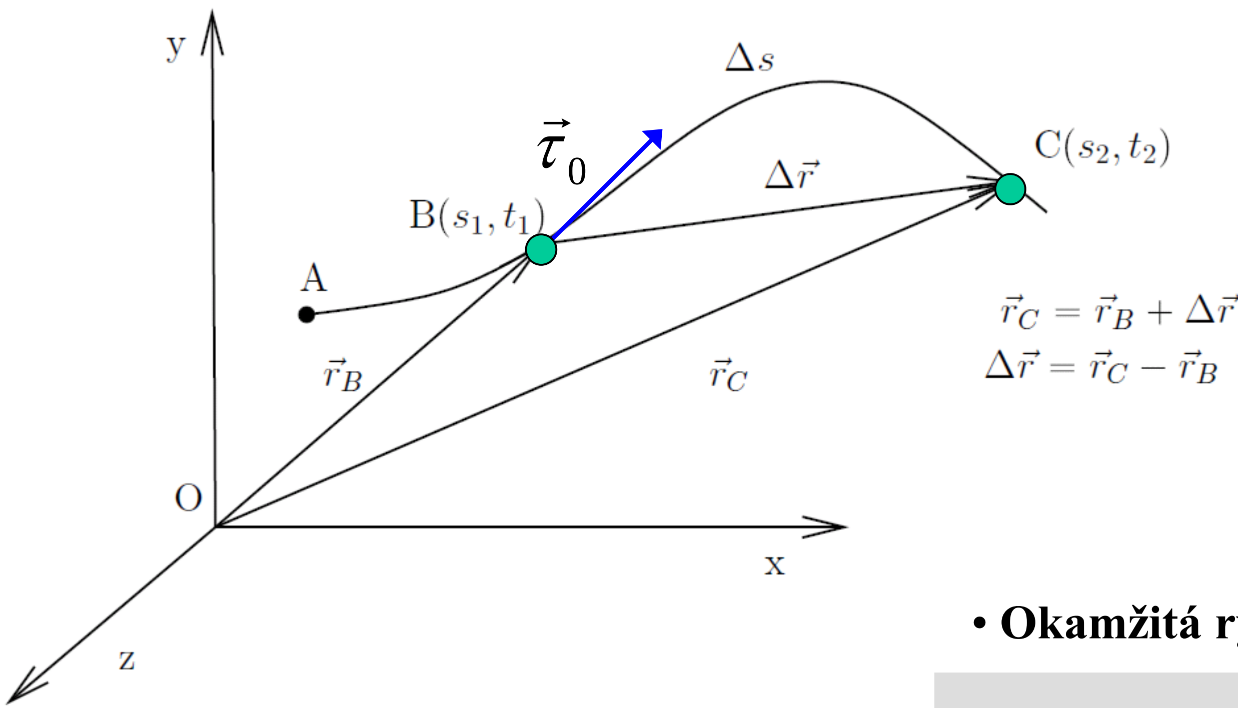
Opakování - Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



- Při přibližování bodu C k bodu B přejde $\Delta \vec{r}$ na vektor $d\vec{r}$, který bude mít směr tečny k dráze $\vec{\tau}_0$ a velikost ds.
  Potom:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}_0$$

- **Okamžitá rychlost hmotného bodu:**

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Opakování - Rychlost

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, ve kterém okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu**:**

$$\vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

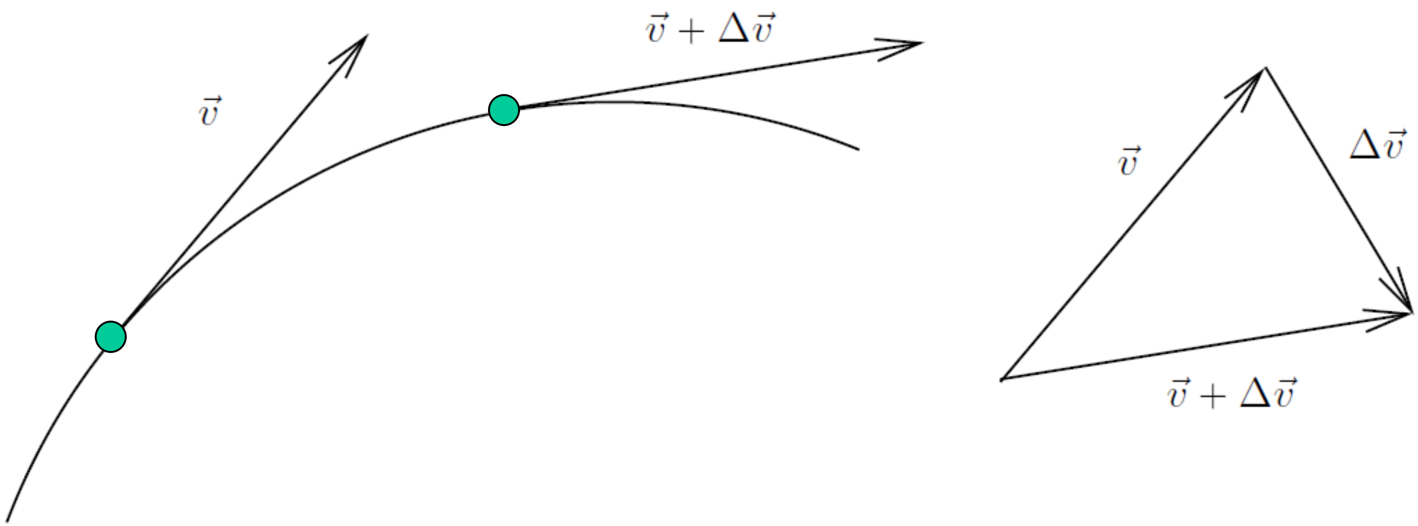
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

- **přímočarý pohyb** – nemění se směr rychlosti $\vec{\tau}_0$
- **rovnoměrný pohyb** – nemění se velikost rychlosti:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s}\right]$$

Opakování - Zrychlení



- při obecném **křivočarém pohybu** se mění jak směr, tak jeho rychlost pohybu hmotného bodu
- **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Opakování - Zrychlení

• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

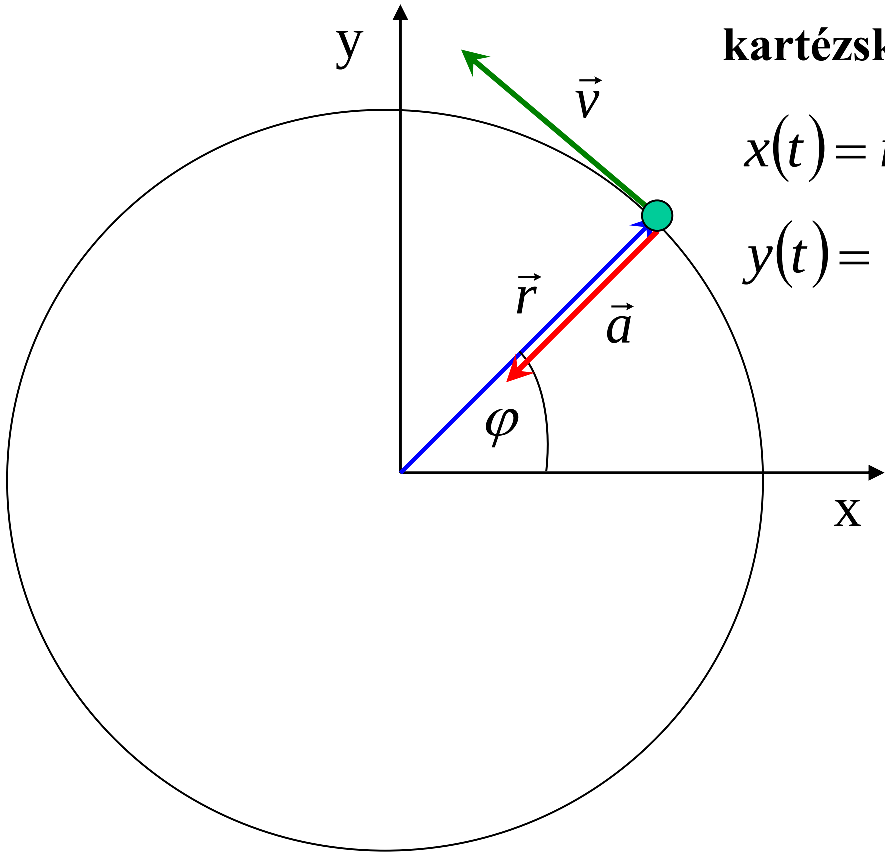
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

• **zrychlení** hmotného bodu je vektorem jehož směr je totožný s přírůstkem rychlosti $\mathrm{d}\vec{v}$

• **velikost zrychlení**:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s}^2\right]$$

Opakování - Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

$$\vec{r}\,\vec{v} = 0 \qquad v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

dostředivé zrychlení (normálové)

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y$$

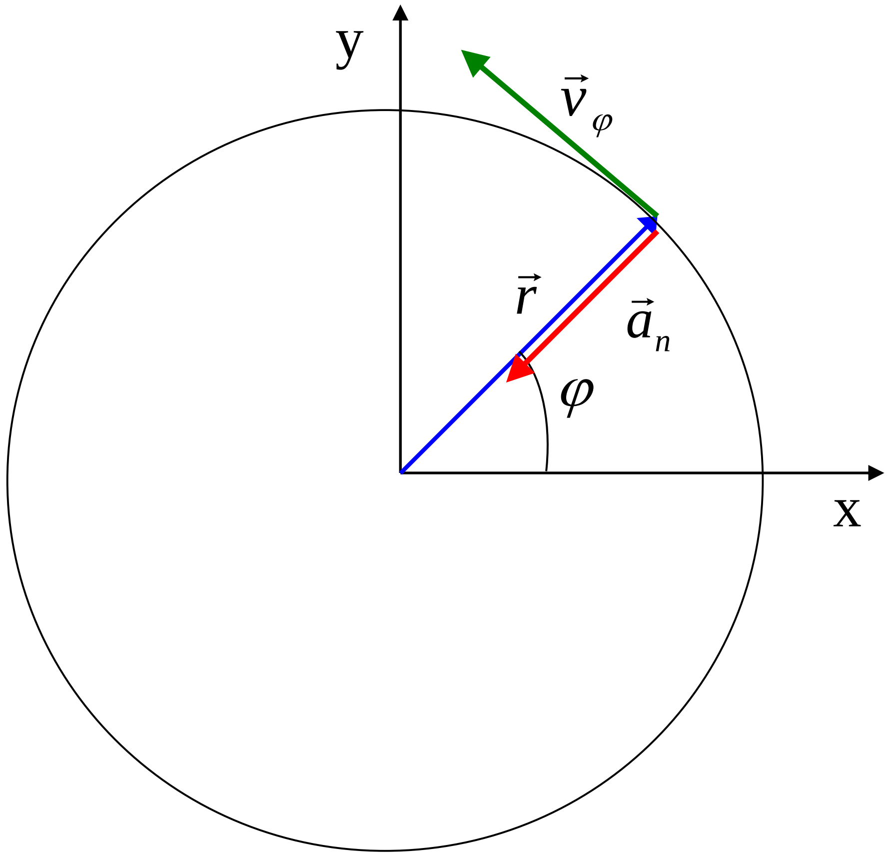
$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

ω - úhlová rychlost $\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda

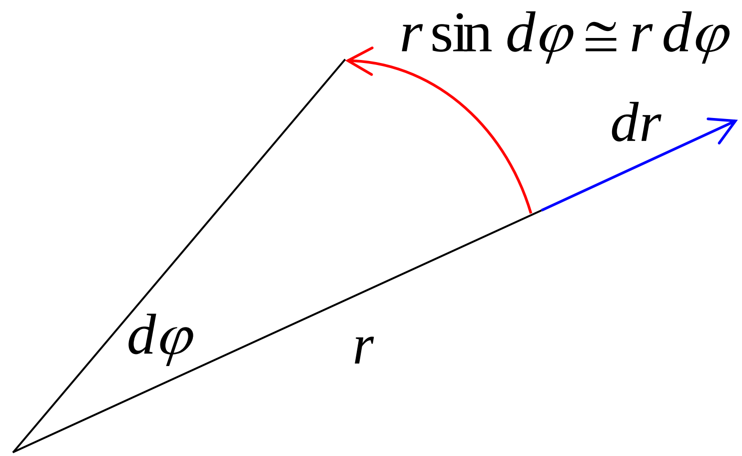
Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

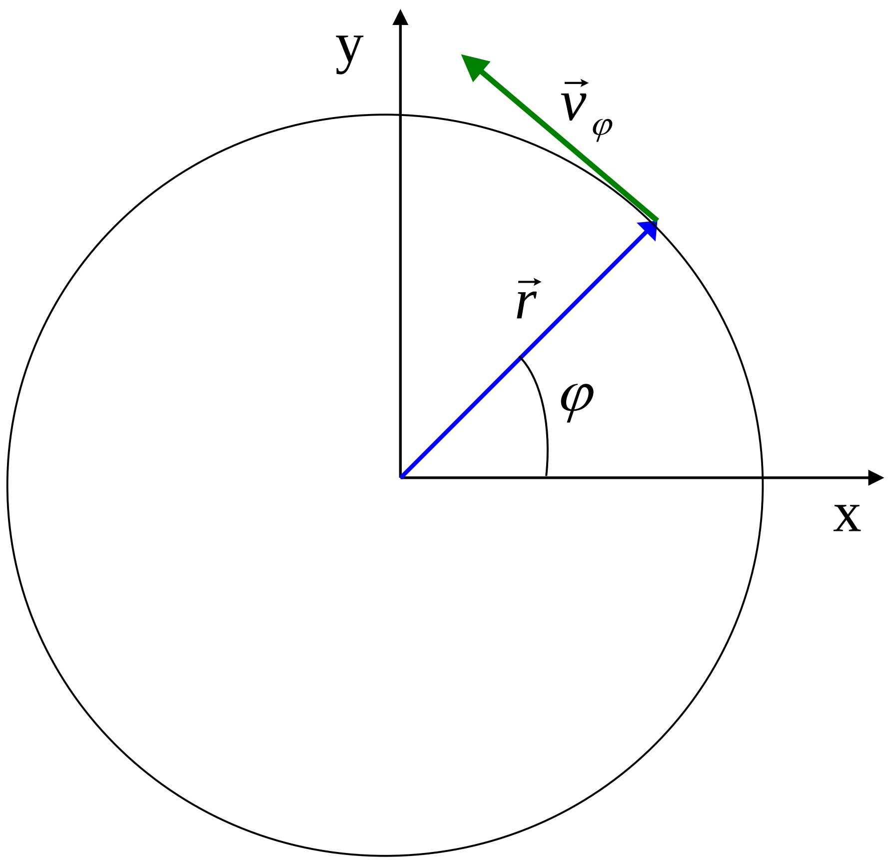
$$\varphi(t) = \omega t$$



ω - úhlová rychlost $\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

rychlost

$$v_r(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) = 0$$ - radiální rychlost

$$v_\varphi(t) = r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(t) = r\omega$$ - tečná (tangenciální rychlost)

ω - úhlová rychlost $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

Obloukový element křivky 2D

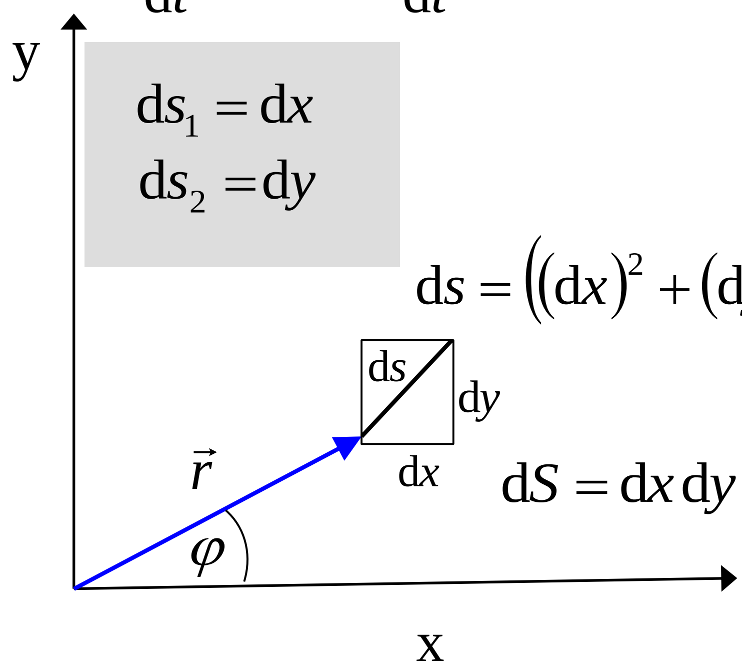
kartézské souřadnice:

$$ds = \left(\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt},\ v_x = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow ds = v\, dt$$

$$ds_1 = dx$$
$$ds_2 = dy$$

$$ds = \left((dx)^2 + (dy)^2 \right)^{1/2}$$



$$dS = dx\, dy$$

polární souřadnice:

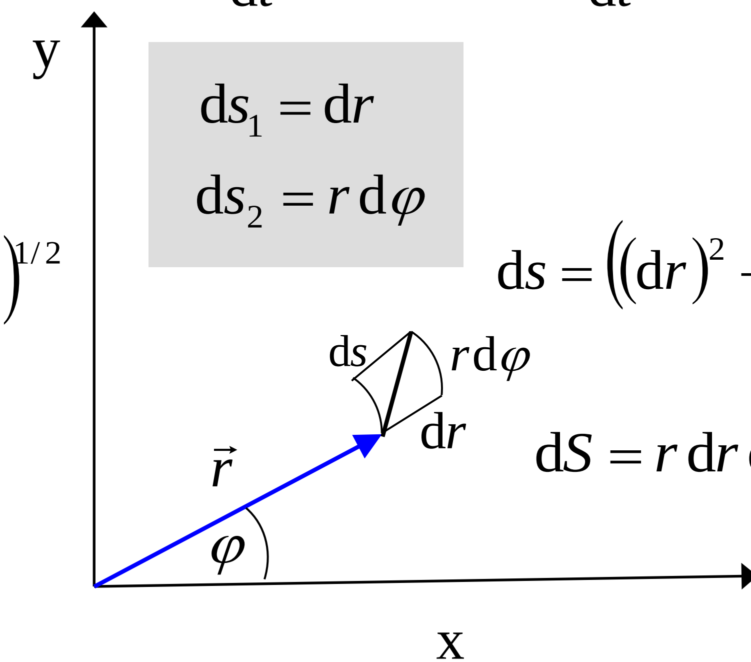
$$x = r(t)\cos\varphi(t) \qquad dx/dt = \cos\varphi\, dr/dt - r\sin\varphi\, d\varphi/dt$$
$$y = r(t)\sin\varphi(t) \qquad dy/dt = \sin\varphi\, dr/dt + r\cos\varphi\, d\varphi/dt$$

$$ds = \left(\left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + \left(r(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$v_r = \frac{dr(t)}{dt},\ v_\varphi = r(t)\frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow ds = v\, dt$$

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r\, d\varphi$$

$$ds = \left((dr)^2 + (r\, d\varphi)^2 \right)^{1/2}$$



$$dS = r\, dr\, d\varphi$$

Obloukový element křivky 3D

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

- rychlost $\vec{v} = \vec{v}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$v_x = \dot{x}$	$v_\rho = \dot{\rho}$	$v_r = \dot{r}$
$v_y = \dot{y}$	$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$	$v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$
$v_z = \dot{z}$	$v_z = \dot{z}$	$v_\varphi = r \sin\vartheta\,\dot{\varphi}$

Obloukový element křivky 3D

kartézská soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

cylidrická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}\rho)^2 + (\rho\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right)^{1/2}$

sférická soustava: $\mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\right)^{1/2}$

$\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}q_i$ $\quad \mathrm{d}s = \left((\mathrm{d}s_1)^2 + (\mathrm{d}s_2)^2 + (\mathrm{d}s_3)^2\right)^{1/2} = \left((h_1\mathrm{d}q_1)^2 + (h_2\mathrm{d}q_2)^2 + (h_3\mathrm{d}q_3)^2\right)^{1/2}$

h_i – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r\sin\vartheta$	r	ϑ	φ

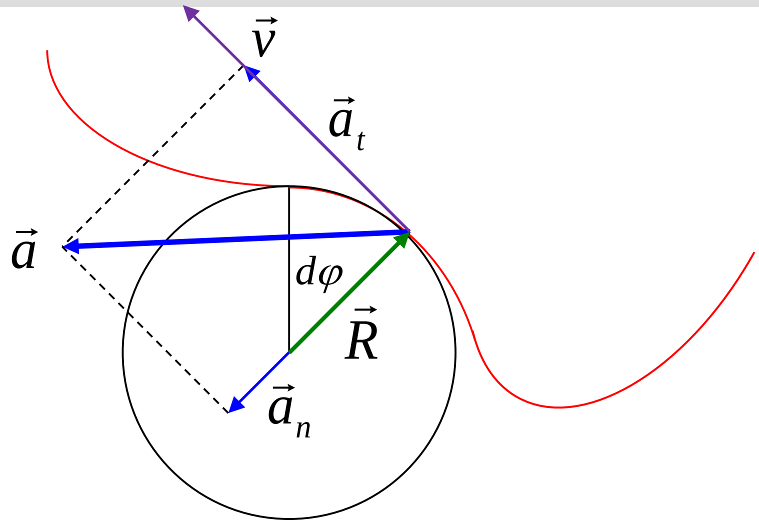
Objemový element: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = h_1\mathrm{d}q_1 h_2\mathrm{d}q_2 h_3\mathrm{d}q_3$

např. sférická soustava souřadnic **objemový element:** $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

plošný element na povrchu koule o poloměru r: $\mathrm{d}S = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

element prostorového úhlu: $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S / r^2 = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$

Tečné a normálové zrychlení



- **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

- **Tečné zrychlení** získáme průmětem vektoru zrychlení $\vec{a}$ do směru rychlosti $\vec{\tau}_0 = \dfrac{\vec{v}}{v}$ a vynásobením jednotkovým vektorem ve směru rychlosti:

$$\vec{a}_t = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \frac{2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+2v_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

- **Normálové zrychlení:**

$$\vec{a}_n = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{R}\right)\frac{\vec{R}}{R} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

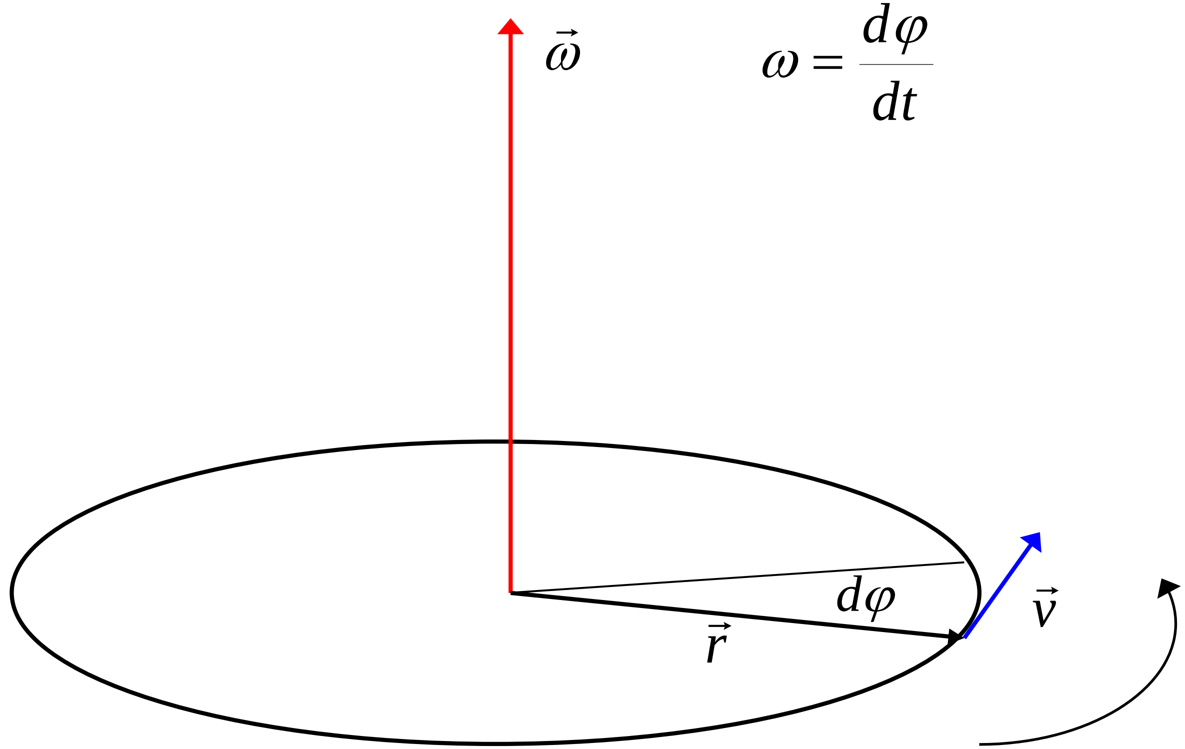
Úhlová rychlost a zrychlení

- **vektor úhlové rychlosti**

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- **úhlové zrychlení**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{dt}$$

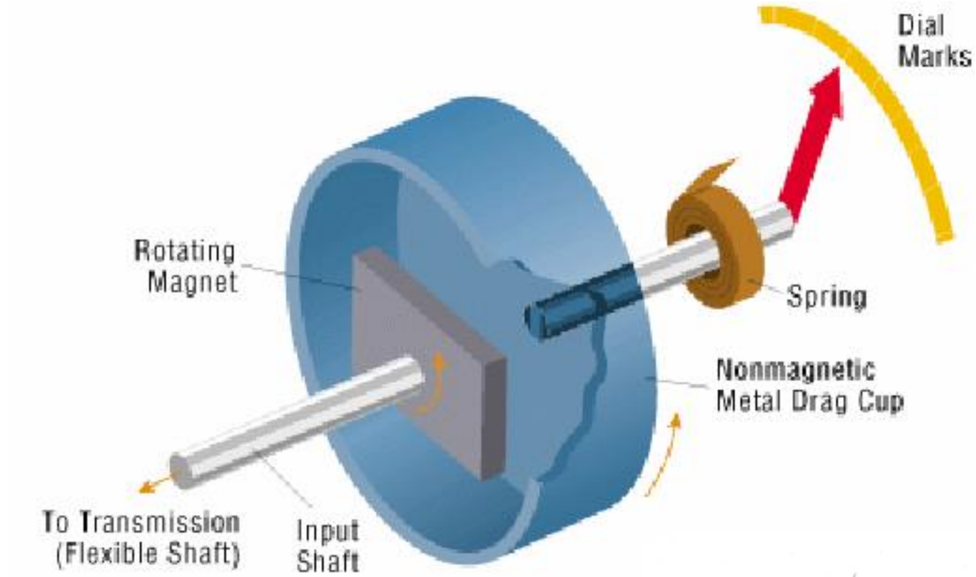


$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Tachometr

- **analogový**

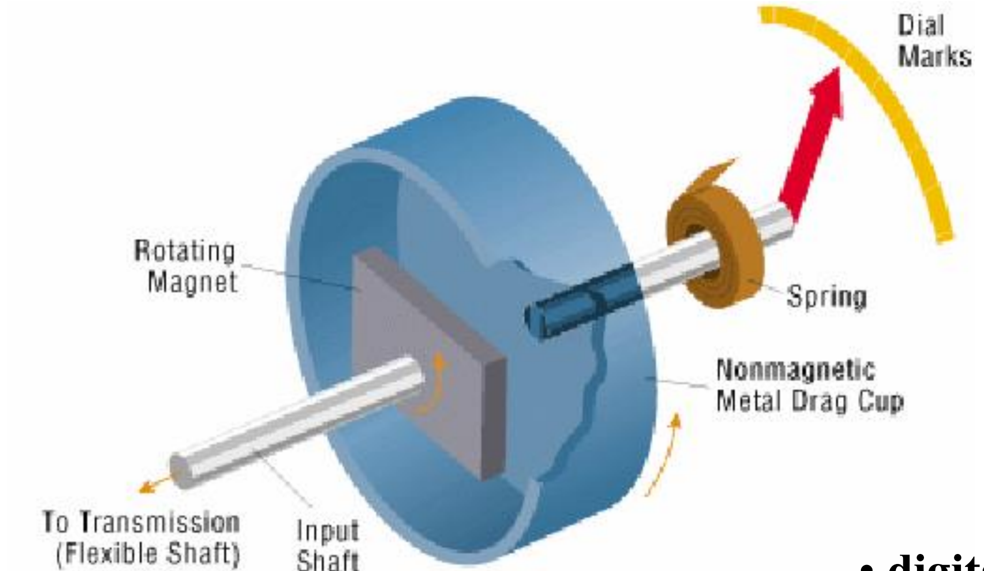
  - Otto Schulze 1902



Tachometr

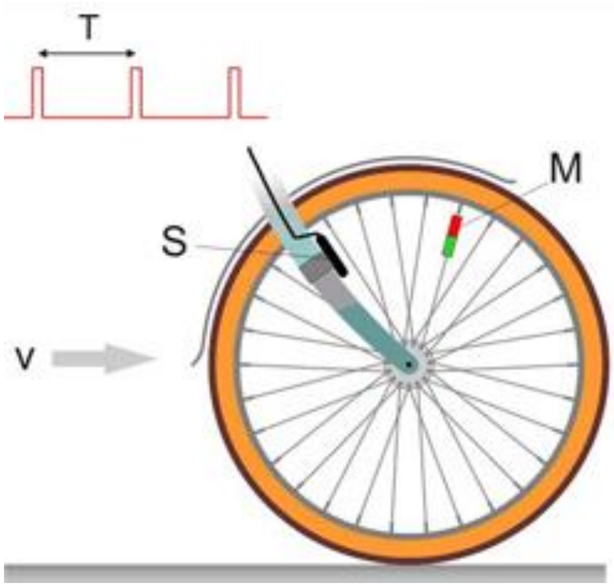
• **analogový**

- Otto Schulze 1902



• **digitální**

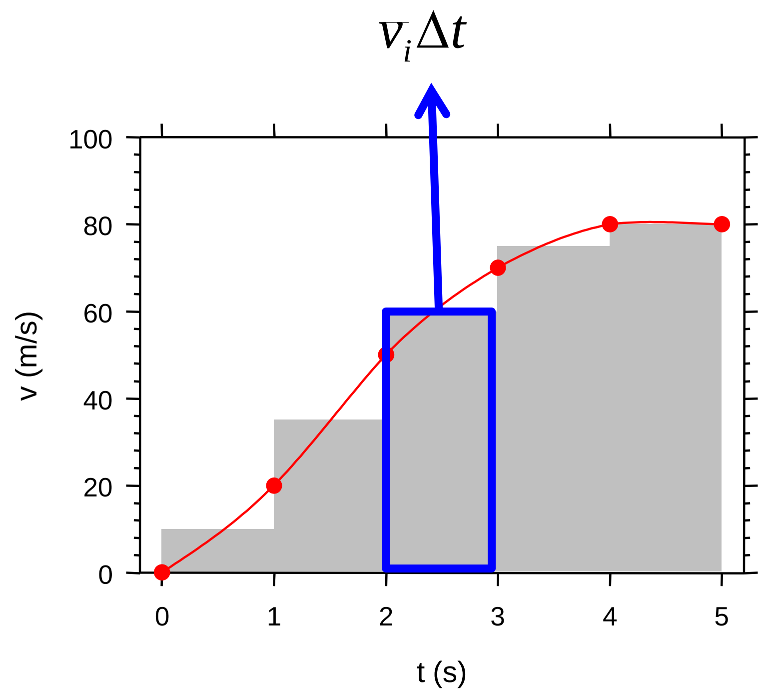
• **digitální**



Dráha

• dráha: délka trajektorie

t (s)	v (m/s)
0	0
1	20
2	50
3	70
4	80
5	80



• dráha: $s = \sum_i v_i \Delta t$

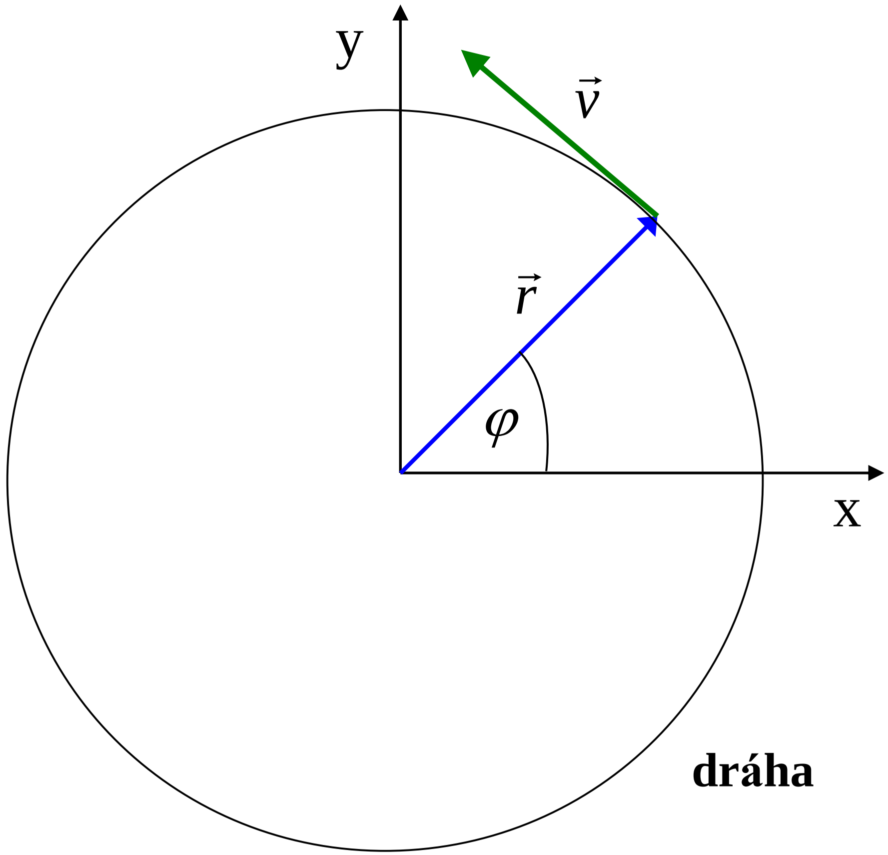
$$\Delta t \to 0 \quad s = \int v\, dt$$

Dráha

- dráha, kterou urazil hmotný bod:

$$s \equiv \int \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int v(t) \mathrm{d}t$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

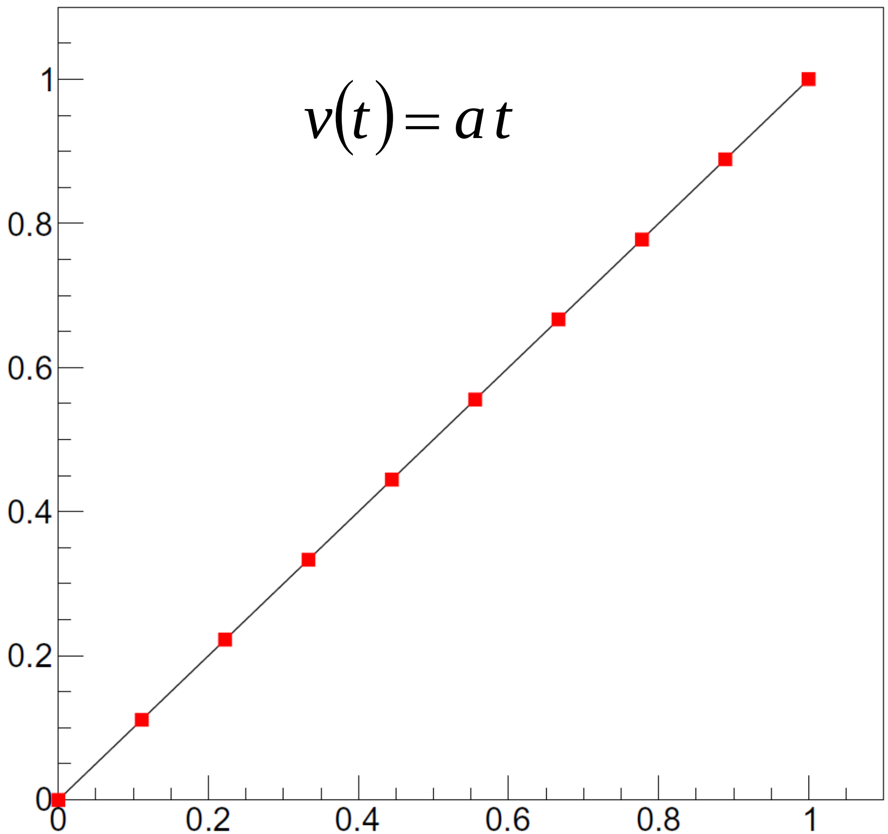
$$s = \int_0^T \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int_0^T r\omega\, dt = \left[\frac{2\pi r}{T} t \right]_0^T = 2\pi r$$

Numerická integrace

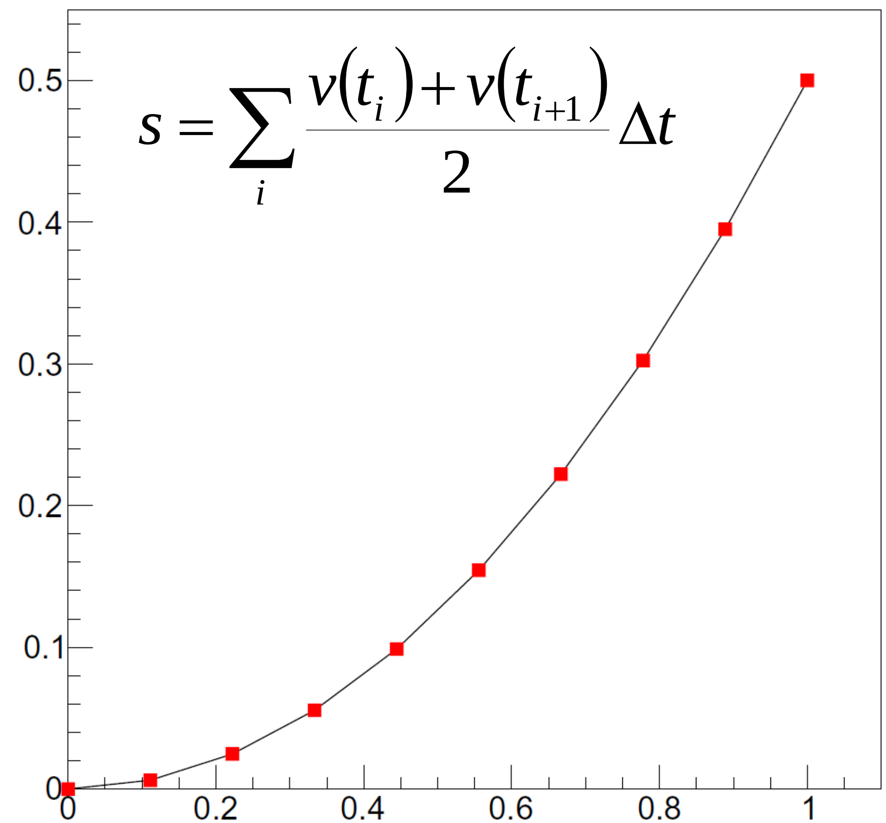
- rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$n = 10 \qquad dt = 1/9 \qquad a = 1$$

časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy

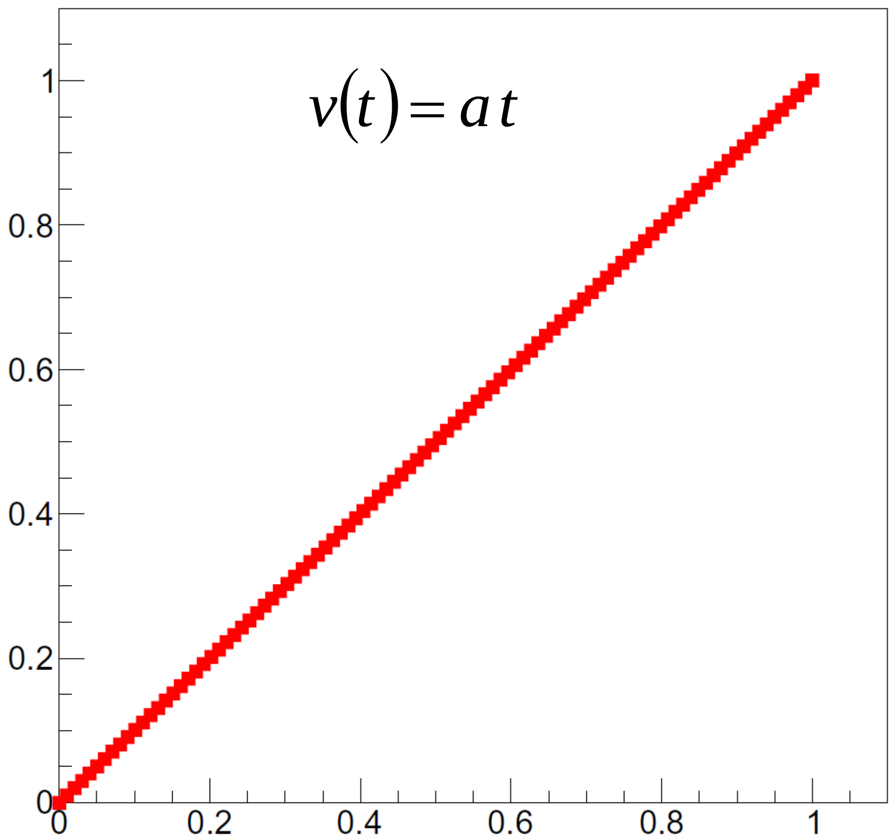


Numerická integrace

• rovnoměrně zrychlený pohyb:

$n = 100 \qquad dt = 1/99 \qquad a = 1$

časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy